HISTORIA MATHEMATICA **19** (1992), 40–59

Zur Geschichte des Halbgruppenbegriffs

KARL H. HOFMANN*

Technische Hochschule Darmstadt, D-6100 Darmstadt, Germany

Wir skizzieren die Konturen einer Theorie der Halbgruppen, also eines Zweiges der Mathematik, der sich ganz im Gegensatz zu der im 19. Jahrhundert geschaffenen Gruppentheorie im 20. Jahrhundert entwickelte. Als Arbeitshypothese schlagen wir vor, daß die Anfänge der Halbgruppentheorie bereits im Werk von Sophus Lie angelegt sind. Über eine präzise Definition des Gruppenbegriffs war man sich im 19. Jahrhundert noch keineswegs im Klaren. Objekte, die man später als Halbgruppen bezeichnen wird, heißen damals Gruppen. Lie ist sich des Unterschieds wohl bewußt und versucht, sich mit diesem Problem auseinanderzusetzen. Wir schließen mit einem Ausblick auf die gegenwärtige Forschung über die Lieschen Fundamentalsätze im Rahmen der Halbgruppentheorie. © 1992 Academic Press, Inc.

After framing the outlines of a theory of semigroups as a mathematical domain developed in the 20th century in contrast with group theory as an achievement of the 19th, we propose, as a working hypothesis, the claim that the beginning of semigroup theory is indicated in the work of Sophus Lie. Insecurity on the axiomatic definition of a group is still widespread in the nineteenth century; objects which later will be recognized in their own right as semigroups are called groups at that period. Lie is conscious of the difference and attempts to deal with it. We give an outlook on contemporary research on Lie's Fundamental Theorems in the context of semigroups. © 1992 Academic Press, Inc.

Tout d'abord on se rend conte que la théorie des semigroupes est une affaire du 20ème siècle, tandis que la fondation de la théorie des groupes s'accomplit pendant le 19ème . Après, on propose l'hypothèse que les débuts d' une théorie des semigroupes se trouvent cachées dans l'œuvre de Sophus Lie. À l'époque il n'y avait que peu d'algébristes ou géomètres qui comprenaient la nécessité de la rigueur dans la définition d'un groupe. On appellait "groupes" même des objets qui plus tard seront nommés "semigroupes." Par contraire, Lie était conscient de la différence entre les deux et s'efforcait de s'en occuper. Finalement, on donne un résumé de la recherche contemporaine concernant les théorèmes fondamentaux de Lie pour les semigroupes. © 1992 Academic Press, Inc.

AMS 1991 Subject classifications: 01A55, 01A60, 22-03, 20-03, 20M20, 54H15.
KEY WORDS: Semigroup, Lie group, Lie's Fundamental Theorems, inverse element.

Die Genesis des Gruppenbegriffs im Laufe des 19. und 20. Jahrhunderts hat die Aufmerksamkeit der Mathematikhistoriker auf sich gezogen und ist eingehend erörtert worden [Wußing 1969; Bourbaki 1972]. Der historische Werdegang des Begriffs der Halbgruppe hingegen—weniger kompliziert weil allgemeiner und axiomatisch simpler—hat keine systematische Behandlung erfahren. Diese Lücke in der mathematikgeschichtlichen Forschung müßte geschlossen werden. Die im

* Vortrag gehalten am 15. Mai 1990 auf der Sommerschule "Zum Verhältnis von Mathematik und Anwendungen im 18. und 19. Jahrhundert" an der Pfalzakademie in Lambrecht.

0315-0860/92 $3.00

folgenden vorgetragenen Bemerkungen sollen als Anregung an die Historiker dienen, sich dieser Aufgabe anzunehmen. Ich wünschte mir ein Buch über *die Genesis des abstrakten Halbgruppenbegriffs,* oder eines mit dem Titel *Asymmetrie, Halbgruppe und Ordnung,* oder auch eines mit dem Titel *Sophus Lie, forerunner of the idea of Asymmetry in the Nineteenth Century.* Die gestellte Aufgabe erfordert einerseits den Zugang zu dem gelegentlich subtilen Stoff einer sich in viele Zweige der Mathematik hinein verästelnden Halbgruppentheorie und verlangt andererseits einen verständnisvollen Umgang mit den Quellen. Vielleicht verspricht ein gemeinsames Vorgehen von Historikern und Mathematikern den größten Erfolg.

VORBEMERKUNGEN

Ein Verständnis des Gruppenbegriffs wird heute bei jedem Mathematiker oder Physiker als fester Bestandteil seiner Allgemeinbildung vorausgesetzt, und selbst der gebildete Laie hat eine Ahnung davon, daß sich im Begriff der Gruppe ein in der Geschichte der Mathematik neuartiges begriffliches Denken manifestiert hat, welches im Innern der Mathematik selbst als auch in den traditionellen Anwendungsbereichen der Mathematik wie etwa der Physik bahnbrechende Fortschritte ermöglicht hat. Unbestritten als eine der gigantischsten Leistungen der Mathematik in diesem Jahrhundert ist die Klassifikation der *endlichen einfachen Gruppen.* Die Theorie der *topologischen* und *Lieschen Gruppen* gilt infolge der Anwendungen in so vielen mathematischen Spezialgebieten und wegen dem vergleichsweise hohen Komplikationsgrad der zu ihrer Beherrschung erforderlichen Mathematik als zentral und hochgradig nichttrivial. Als eine große, aber vom mathematischen Publikum hinter neuen Tagesordnungspunkten schon fast wieder vergessene historische Leistung dieses Jahrhunderts in diesem Zusammenhang ist auch die in den 50er Jahren geleistete Lösung des 5. Hilbertschen Problems. Im Rahmen seiner richtungsweisenden Aufgabenliste [Hilbert 1900] hatte Hilbert die Frage aufgeworfen, ob sich der von Lie eingeführte und dann von Elie Cartan ausgebaute Begriff einer differenzierbaren Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit allein mit den Begriffen der Stetigkeit begründen ließe. Aus den Arbeiten von Gleason, Montgomery, und Zippin sowie Yamabe ging hervor, daß in der Tat jede auf einem zu dem euklidischen $\mathbb{R}^n$ lokal homöomorphen Raum definierte topologische Gruppe schon eine Liesche Gruppe ist. Zu jener Zeit waren die *einfachen Lieschen Gruppen* längst klassifiziert. Heute gehört die Theorie der Gruppen auf algebraischen Varietäten, der sogenannten *algebraischen Gruppen,* zu einem der aktuellsten Themen der algebraischen Geometrie und Gruppentheorie zugleich.

Nun aber sind auf der anderen Seite der Begriff der *Halbgruppe* und seine Anwendungen nicht nur weniger geläufig, sondern selbst unter Mathematikern in seinem Standort umstritten. Es ist daher angezeigt, mit einigen Bemerkungen zum aktuellen mathematischen Entwicklungsstand zu beginnen und auf einige Teilgebiete der Mathematik hinzuweisen, in denen von Halbgruppen Gebrauch gemacht wird.

Hernach erst werden wir uns den dem Verfasser bekannten Quellen zur Vorgeschichte des Halbgruppenbegriffs zuwenden.

HALBGRUPPEN IN DER MATHEMATIK

Eine *Halbgruppe* ist eine Menge mit einer assoziativen Multiplikation. Eine Halbgruppe heißt *kürzbar*, wenn in ihr jede der Gleichungen $ax = bx$ sowie $ya = yb$ jeweils $a = b$ zur Folge hat. Eine Halbgruppe ist eine *Gruppe*, wenn jede der Gleichungen $ax = c$ und $ya = c$ eine eindeutige Lösung hat. Insbesondere ist jede Gruppe kürzbar. Die Existenz eines Neutralelements und eines inversen Elementes eines jeden Elementes ist rasch nachweisbar, und umgekehrt ist jede Halbgruppe mit Neutralelement und Inversen eine Gruppe. Die additive Halbgruppe der natürlichen Zahlen ist kürzbar, hat aber weder ein neutrales Element noch erlaubt sie die Bildung inverser Elemente. Die Prototypen einer Gruppe—mathematisch ebenso wie historisch—sind die Gruppe $S(X)$ aller Bijektionen einer Menge nebst ihren Untergruppen. Jede Untergruppe G von $S(X)$ stattet die Menge X mit einer Struktur von *Symmetrien* aus. Bei Galois und Abel wurden die Wurzeln einer algebraischen Gleichung permutiert, und die dabei auftretenden Symmetriegruppen waren die Automorphismengruppen des von diesen Wurzeln erzeugten Körpers. Camille Jordan behandelt Kristallsymmetrien durch eine Klassifikation der Bewegungsgruppen des euklidischen Raumes [Scholz 1989]. Klein's Vorschlag, eine geometrische Struktur durch ihre Automorphismengruppe zu begründen, wurde richtungweisend, und Lie erträumte sich eine Galoistheorie für Differentialgleichungen; seine Leistung wurde in anderen Richtungen zunächst viel wirksamer, und sein ursprüngliches Projekt ist immer noch im Fluß und unerledigt (eine neuere Quelle zum Stand dieser Richtung der Lieschen Theorie s. z. B. [Oliver 1986]). Der enorme Erfolg der Gruppentheorie in der Physik des 20.Jahrhunderts paßt in das Schema: Das eine Beispiel ist das der Relativitätstheorie: Zunächst bleiben die im vorigen Jahrhundert von J. C. Maxwell erstellten Gleichungen für die elektrischen und magnetischen Felder unter den von Lorentz und Poincaré erörterten Gruppen von Koordinatentransformationen invariant, und diese Gruppen sind Symmetriegruppen einer Geometrie auf dem 4-dimensionalen affinen Raum–Zeit–Kontinuum, deren linearer Anteil (eben gerade die Lorentzgruppe) eine quadratische Form der Signatur $+++-$ invariant läßt. Dies bezeichnet man landläufig auch als das Relativitätsprinzip oder das Prinzip der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit. Einstein stellte das Postulat auf, daß alle physikalischen Gesetze—insbesondere etwa auch die der Mechanik—den gleichen Invarianzforderungen genügen müßten. Dieses Postulat ist bis jetzt durch kein Experiment widerlegt. Die öffentliche Meinung hat dieses an sich rein gruppentheoretische Postulat zu einer der mystifiziertesten naturwissenschaftlichen Entdeckungen des Jahrhunderts hochstilisiert. Zweitens aber hat sich in der Mechanik der Elementarteilchen herausgestellt, daß die Natur auf die in wesentlichen physikalischen Experimenten angelegten Fragen nicht mit Zahlen antwortet, wie das bei Messungen in der klassischen Physik noch üblich war, sondern mit linearen Darstellungen der für die Symmetrie der die quantenmechanischen Systeme zuständigen Gruppen. Auch hier, in der Beschreibung physikalischer Phänomene durch Symmetriegruppen, ist vorläufig kein Ende abzusehen.

Alle diese Bemerkungen waren angezeigt, um daran zu erinnern, wie fruchtbar die sich im 19. Jahrhundert herausbildende Vorstellung der Gruppe und der mit ihr unlösbar gekoppelte, zutiefst geometrische Begriff der Symmetrie geworden sind, und wie intensiv sie in der mathematischen Forschung der Gegenwart fortwirken. Daher verdienen sie auch die ihr zuteil gewordene Zuwendung der Mathematikhistoriker, die sich mit dem 19. und 20 Jahrhundert befassen [Wußing 1969; Yaglom 1988].

Beispiele von Halbgruppen

Wie steht es nun mit dem Begriff der Halbgruppe? Die einfachsten Prototypen einer Halbgruppe sind die Menge aller Selbstabbildungen X^X einer Menge X mit der Zusammensetzung von Funktionen als Verknüpfung sowie alle Unterhalbgruppen davon. Die volle Permutationsgruppe $S(X)$ ist in X^X als eine maximale Untergruppe enthalten. Warum man bis zu diesem Tage zuerst eher an die Permutationsgruppe $S(X)$ denkt als an die Transformationshalbgruppe X^X, ist weder vom mathematikpsychologischen noch vom mathematikhistorischen Standpunkt aus leicht verständlich, denn die Gruppe ist komplizierter, die Halbgruppe ist simpler. Vielleicht hat es damit zu tun, daß man Permutation historisch erst später als Funktionen zu begreifen lernte, und daß das Wort *Transformation* ursprünglich schon immer als *bijektive* Selbstabbildung verstanden worden war; davon wird später noch die Rede sein müssen. Wir wollen an dieser Stelle bemerken, daß im Falle einer Halbgruppe $S \subseteq X^X$ von Selbstabbildungen einer Menge X die Kürzungsregel $mf = mg \Rightarrow f = g$ von der Injektivität und die Kürzungsregel $fe = ge \Rightarrow f = g$ von der Surjektivität der in S enthaltenen Transformationen erzwungen wird. Also ist S kürzbar, wenn S aus bijektiven Selbstabbildungen, d. h. aus Permutationen von X besteht. (Präzisere Informationen findet man in Scheins Übersichtsartikel [1970], S. 35.)

Ebenso wie im Fall der Gruppen hat man als im Wesentlichen gleichwertig neben der Theorie der Unterhalbgruppen der Transformationshalbgruppe einer Menge X die Halbgruppenwirkungen $(s, x) \mapsto s \cdot x$: $S \times X \to X$ einer Halbgruppe auf der Menge X. Halbgruppenwirkungen liefern ein sehr flexibles Modell für einen *Automaten* oder ein *System*. Hierbei ist die Menge X aufgefaßt als eine Menge von Zuständen, die das System S durch Anwendung einer Transformation in einer im allgemeinen *irreversiblen* Weise verändert. Oder, anders ausgedrückt, einem "Input" $x \in X$ weist der Automat S durch Anwendung einer Operation $s \in S$ einen "Output" $s \cdot x$ zu. Die Wirkungsfunktion $(s, x) \mapsto s \cdot x$ heißt dann auch *Übergangsfunktion*. Der Begriff des Systems modelliert etwa auch die Anwendung eines Experimentes (aus einer Menge S möglicher oder geeigneter Experimente) auf eine Menge physikalischer Zustände. Ein Experiment s führt einen Zustand x in einen Zustand $s \cdot x$ über.

Es gibt aber noch zahlreiche andere Prototypen, die sich selbst heute nicht durchweg besonderer Bekanntheit erfreuen, obschon sie grundlegend sind für die sehr weitreichende, da sehr allgemeine und flexible Automaten- und Systemtheorie. Ist uns beispielsweise eine Menge X vorgelegt und ist $\{1, \ldots, n\}$ ein endliches Anfangsstück der Folge der natürlichen Zahlen, dann ist eine Funktion $w: \{1, \ldots, n\} \to X$ ein "Wort" $w_1 w_2 \cdots w_n$ (mit "Buchstaben" $w_j = w(j)$ aus dem "Alphabet" X). Die Verkettung von einem Wort $v: \{1, \ldots, m\} \to X$ mit dem Wort w liefert ein neues

$$v * w: \{1, \ldots, m + n\} \to X, \qquad (v * w) = \begin{cases} v(t) & \text{für } 0 < t \leq m, \\ w(t - m) & \text{für } m < t \leq m + n. \end{cases}$$

"Anschreiben von w nach v als $v_1 \cdots v_m w_1 \cdots w_n$." Eine Teilmenge der so definierten Halbgruppe nennt man eine *Sprache* [Lallement 1979].

Es gibt ein Analogon hierzu, in welchem die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, die man ja als ein grobes diskretes Modell der Zeit auffassen kann, durch die Halbgerade $]0, \infty[$, d. h. eine kontinuierliche Zeit ersetzt. Ist also wieder X eine Menge und $g:]0, a] \to X$ eine Funktion auf dem reellen Intervall $]0, b]$, $0 < b$, mit Werten in X, so können wir f als zeitliche Entwicklung eines Systems auffassen, das nacheinander die Zustände $f(t)$ durchläuft. Ist $f:]0, a] \to M$ eine zweite Systemgeschichte, so gibt es zu den beiden eine dritte, die aus f und g durch Verkettung entsteht:

$$f * g:]0, a + b] \to M, \qquad (f * g) = \begin{cases} f(t) & \text{für } 0 < t \leq a, \\ g(t - a) & \text{für } a < t \leq a + b. \end{cases}$$

"Ablauf von g nach dem Ablauf von f." Diese Halbgruppen haben kein Einselement, weshalb von inversen Elementen schon von vorneherein keine Rede sein kann. Sie sind aber kürzbar.

So wie der Gruppenbegriff von Anfang an mit dem Begriff der Symmetrie in Algebra und besonders in der Geometrie verbunden ist, gehören die Halbgruppen zu irreversiblen Prozessen oder Vorgängen, wie sie in physikalischen Zusammenhängen auftreten. Klar formuliert wurde dies wohl erstmalig von A. D. Wallace, dem Begründer und Altmeister einer topologischen Halbgruppentheorie in den 50er Jahren: "*Semigroups appear more naturally in a physical universe than in a geometric one. . . . [They] might be regarded as exemplars of irreversible actions. . . . The great majority of phenomena are irreversible, ergo one must have semigroups.*" [Hofmann, Koch, and Mostert 1974, 20ff.]

Aspekte der modernen Halbgruppentheorie

Mit dem Begriff "Halbgruppe" verbinden Mathematiker heute je nach ihrer Herkunft aus verschiedenen Spezialgebieten ganz verschiedene Vorstellungen. Fest verankert ist der Begriff in der Funktionalanalysis für die Halbgruppen beschränkter Operatoren auf einem Banach- oder sogar Hilbertraum. Das erste zusammenfassende Pionierwerk stammt von Einar Hille aus dem Jahre 1948 [Hille 1948]. Inzwischen gibt es hierzu eine Fülle Lehrbücher, von denen etwa auf das von Goldstein [Goldstein 1985] verwiesen sei, in dem man eine Fülle von Literaturhinweisen findet. Dieser Zweig der Halbgruppentheorie ist aus dem Methodenkapital der Theorie der gewöhnlichen oder partiellen linearen Differentialgleichungen oder aus der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht mehr wegzudenken.

Im Bereich der harmonischen Analysis und in der Darstellungstheorie von Gruppen haben halbgruppentheoretische Methoden seit etwa dreißig Jahren eine wichtige Rolle gespielt [Williamson 1967]. Gerade in allerjüngster Zeit hat sich an den verschiedensten Stellen die Notwendigkeit aufgedrängt, die traditionell als komfortabel empfundene Straße der Symmetrie zu verlassen und Asymmetrie und damit auch Halbgruppen aufzusuchen. Über neueste Entwicklungen in diesem Bereich gibt eine Sammlung Auskunft, die eben erschienen ist [Hofmann, Lawson, & Pym 1990].

In der Algebra und in ihren Anwendungen, etwa in der theoretischen Informatik, ist die Halbgruppentheorie ein etablierter Zweig von dem mehrere Lehrbücher Zeugnis ablegen, so etwa die Bücher von Howie und Lallement, um zwei der neuesten zu nennen.

Eine systematische halbgruppentheoretische Erweiterung der von Sophus Lie vor mehr als 100 Jahre begründeten Gruppentheorie gibt es merkwürdigerweise erst vor kurzem. Über die Gründe ist in der Einleitung zu dem einzigen bislang über diesen neuen Gegenstand existierenden Buch spekuliert worden [Hilgert, Hofmann, & Lawson 1989]. Einige Hintergründe sind auch in in der Einleitung zu einem in [Hofmann, Lawson, & Pym 1990] abgedruckten Beitrag dargestellt [Hofmann 1990a]. Angefangen wurde in neuerer Zeit eine solche Theorie durch Charles Loewner ausgangs der 40er Jahre; ihn motivierten Anwendungen in der Funktionentheorie. Allerdings sind diese Ansätze ohne Wirkung geblieben und wohl weitgehend vergessen worden [Hofmann 1990a]. Wir formulieren unsere erste These wie folgt:

These 1 [Hofmann 1984]. Die Historiker werden bei näherem Zusehen die Anfänge einer abstrakten Halbgruppentheorie nicht in erster Linie bei den Großmeistern der Algebra des 19. Jahrhunderts finden, sondern bei dem Analytiker und Geometer Sophus Lie.

Damit würde die neue Theorie der Lieschen Halbgruppen [Hilgert, Hofmann, & Lawson 1989] einen mehr als 100 Jahren alten Faden wiederaufnehmen und weiterspinnen.

Aus der These 1 ergibt sich noch eine weiterer Wunsch an die Adresse der Geschichtsforscher der Mathematik. Vielleicht werden damit zum heutigen Zeitpunkt schon offene Türen eingerannt. Es ist verständlich, daß in den meisten Quellen, auch den neuesten, Felix Klein und Sophus Lie in einer Art von Einheit gesehen werden. In der Tat sind die persönlichen Biographien der beiden Mathematiker aufs engste verwoben, und man kann ihren gemeinsamen Einfluß auf die Akzeptanz der Gruppentheorie nicht hoch genug einschätzen. Dennoch scheint es mir evident, daß Lie dabei viel schlechter fährt als der farbigere und langlebigere Klein. Immer wieder sind verdienstvolle Einzeldarstellungen gegeben worden (s. z. B. Günter [1968/1981]; Boseck [1986]). Eine gerechte und profunde Würdigung von Lie's Leistung sind uns die Historiker selbst nach Yagloms Buch [Yaglom

1988] (s. auch [Hofmann 1990b]) bis heute schuldig geblieben. Vor allem die Arbeiten von Hawkins und Rowe scheinen hier eine Wende anzudeuten (s. [Hawkins 1989, Hofmann 1990b; Rowe 1989]). Wir wenden uns nun einer zukünftigen Geschichtsschreibung der Halbgruppentheorie zu.

ZUR GESCHICHTE DER HALBGRUPPENTHEORIE

Die Wasserscheide

Durch eine Beobachtung in der Einleitung zu ihrem nun klassischen Text über die algebraische Theorie der Halbgruppen haben Clifford und Preston [Clifford & Preston 1961] bewirkt, daß allgemein angenommen ist, daß das *Wort* "Halbgruppe (semigroupe)" 1904 in einem französischen Text des Abbé de Séguier [de Séguier 1904] über abstrakte Gruppentheorie zum ersten Mal auftaucht. Fast noch im selben Jahr wurde dieses Buch von dem amerikanischen Algebraiker Dickson besprochen [Dickson 1904]; dieser war ebenfalls einer der ersten, welche die Gruppenaxiome auf mögliche Abschwächungen hin untersuchte [Dickson 1905a, 1905b]. Wir gehen also auch jedenfalls davon aus, daß mathematisch sowohl als terminologisch der Begriff der Halbgruppe spätestens 1904–05 feststand. Es wäre eigentlich recht erstaunlich, wenn dieser Begriff urplötzlich ohne Vorläufer aufträte. Ich habe bei früheren Anlässen schon das eine oder andere Mal den Nachweis versucht, daß dies nicht der Fall ist [Hofmann 1984; Hofmann & Lawson 1983]. Dies möchte ich jetzt noch einmal belegen. Ich meine aber, daß dieses Thema von der historischen Forschung bei weitem noch nicht ausgeschöpft ist.

Die Jahrhundertwende ist also für die Geschichte der Halbgruppentheorie und ihrer Anwendungen eine Wasserscheide. Von hier aus hat sie rückwärts und vorwärts zu blicken. Die Marksteine liegen in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts noch weit auseinander [Clifford & Preston 1961; Hofmann 1976; Hofmann 1990a; Hofmann, Koch, & Mostert 1974; Knauer 1980; Preston 1974; Schein 1986]. Erst nach dem Zweiten Weltkrieg findet die Halbgruppentheorie Eingang in verschiedene Gebiete der Mathematik und erlebt die eingangs angesprochenen weit verbreiteten Anwendungen. Eine eigene Fachzeitschrift gibt es seit 1970. Während eine Geschichtschreibung der Halbgruppentheorie im 20. Jahrhundert sicher eine lohnende Aufgabe für sich sein wird, beschäftigen wir uns hinfort mit der Vorgeschichte im 19. Jahrhundert nebst ihren Bezügen zu den neueren und neuesten Entwicklungen. Die Wasserscheide für die Herausbildung des abstrakten *Gruppen*begriffs bildet nach Wußings [Wußing 1969] Analyse das Jahr 1882. Dafür führt er insbesondere die Arbeiten von von Dyck [von Dyck 1882/1883] ins Feld. Als besonders bemerkenswert hebt Wußing hervor, daß schon zu dieser Zeit im zweiten Teil der beiden in den Mathematischen Annalen erschienenen Artikel von von Dyck die Existenz des inversen Elementes in einem rein axiomatischen Aufbau explizit postuliert wird:

Wir setzen nun für unsere Betrachtungen noch fest, daß eine Gruppe, welche die Operation T_k enthält, stets auch ihre inverse Operation T_k^{-1} mit einbegreifen soll. [von Dyck 1882/1883, 74.]

Hierbei ist hervorzuheben, daß das Wort "Operation" bei einigen Verfassern schon damals im Sinne unseres Wortes "Element" gebraucht wird, also nicht etwa im Sinne der Anwendung einer Abbildung oder Funktion. Die Axiomensysteme, die Frobenius 1887 bei einem Beweis des Satzes von Sylow für abstrakte Gruppen und welche Hölder 1889 bei der Definition der nach ihm benannten Kompositionsreihe benützen, definieren (im heutigen Sprachgebrauch) eine kürzbare Halbgruppe, sprechen aber weder von einem Einselement noch erst recht von einem Inversen (s. Wußing [Wußing 1969] zu weiteren Einzelheiten.) Da aber beide von *endlichen* Gruppen handeln, definieren sie dadurch eine Gruppe: Dies ist allerdings ein Satz der Halbgruppentheorie, wenn auch ein simpler. Bei Weber [Weber 1893] wird dieser Sachverhalt 1893 axiomatisch präzise formuliert (s. Wußing [1969], loc. cit.): Zuerst wird axiomatisch definiert, was wir eine kürzbare Halbgruppe nennen; es wird gezeigt, daß die Endlichkeit es erlaubt, die folgende Aussage für Elemente der Halbgruppe zu beweisen:

Die Gleichungen $ax = c$ *und* $yb = c$ *sind eindeutig lösbar.*

Im Falle unendlicher Halbgruppen wird diese Aussage noch als zusätzliches Axiom gefordert. Bei der Wahl *dieses* Axiomensystems ist eine explizite Nennung der Existenz des Einselementes und der inversen Elemente umgangen.

Der Durchbruch zur abstrakten axiomatischen Gruppentheorie hatte also im Prinzip schon vor de Séguiers Lehrbuch stattgefunden.

Die Vorgeschichte

Da sich der Begriff einer Halbgruppe im 19. Jahrhundert offenbar noch nicht in der Rückschau identifizierbar herauskristallisiert hatte, erhebt sich die Frage, nach welchen Spuren wir Ausschau halten müssen.

Es gibt in der Tat sehr frühe Quellen, die die Deutung zulassen, daß in ihnen Halbgruppen behandelt werden. In der Tat ist eine Arbeit von keinem geringeren als N. H. Abel im ersten Heft des ersten Bandes von Crelles Journal [Abel 1826] eine solche. Dort werden alle kommutativen Halbgruppen auf einem reellen Intervall bestimmt; im allgemeinen wird diese Arbeit jedoch von den Spezialisten für Funktionalgleichungen als eine der ihren beansprucht [Aczél 1989]. Auch wenn solche Quellen als Vorbeben einer Halbgruppentheorie nicht unbeachtet bleiben dürfen, kommt es mir hier auf einen anderen Aspekt der Frühgeschichte der Halbgruppentheorie an:

These 2. Das Wort "Gruppe" bezeichnet in zahlreichen Quellen vor 1900—sowohl im Bereich der Systeme von Transformationen einer Menge, als auch im Bereich abstrakter Strukturen—ein mathematisches Objekt, das in der heute gängigen Terminologie als Halbgruppe zu bezeichnen ist.

These 3. Die terminologische Unsicherheit bei den Autoren des 19. Jahrhunderts hinsichtlich der Definition des Gruppenbegriffs ist zwar auch dadurch verursacht, daß axiomatisches Denken noch nicht entwickelt, geschweige denn verbreitet ist. Aber Sophus Lie und seine Schule machen eine bewußte Anstrengung, sich mit dem Unterschied zwischen Gruppe und Halbgruppe auseinanderzusetzen—wenn auch natürlich nicht in dieser Terminologie.

Dabei belegen sie den Unterschied erstmalig mit Beispielen and *Lie* findet auch prinzipielle Sentenzen, die den Unterschied und seine Bedeutung für die Theorie hervorheben. Die Spurensuche zielt im folgenden in diese Richtung.

Gruppe-Halbgruppe bei Jordan und Klein

Auf den Sachverhalt in These 2 hat M. Petrich [1970] aufmerksam gemacht. Er verweist auf einen Artikel von Frobenius und Schur aus dem Jahre 1906 (s. [Frobenius & Schur 1906]), also nach de Séguiers Monographie und Dickson's Arbeiten, in dem man beobachtet, daß der Begriff Gruppe für Halbgruppe steht. Dies mag daraus zu verstehen sein, daß Frobenius in seiner Arbeit von 1893 endliche Gruppen als endliche kürzbare Halbgruppen präzise eingeführt hat und später bei Übergang von endlichen Mengen zu nichtendlichen eine neue Terminologie nicht einführen wollte. Auch Knauer [Knauer 1980] macht in seinem Abriß der Geschichte der algebraischen Halbgruppentheorie auf These 1 aufmerksam. In seiner Monographie [Scholz 1989] untersucht E. Scholz den Einfluß des Studiums der Kristall- und Raumsymmetrien im 19. Jahrhundert auf den Gruppenbegriff. Er weist darauf hin, daß C. Jordan in seiner Abhandlung über die Bewegungsgruppen [Jordan 1868] Gruppen von Transformationen als Halbgruppen definiert, aber implizit die Einbeziehung der identischen Transformation ("mouvement égal") und der Inversen einer jeden vorkommenden Transformation ("mouvement contraire") annehme [Jordan 1868, 99].

Nachdem bei Serret 1866 und in den frühen Schriften von Klein und Lie noch nicht von Gruppen sondern eher von "Systemen" oder "Scharen" oder auch von einem "Zyklus" von Transformationen die Rede war, heißt es in Kleins Erlanger Programm von 1872 [Klein 1872]:

Beliebig viele Transformationen eines Raumes ergeben zusammengesetzt immer wieder eine Transformation. Hat nun eine gegebene Reihe von Transformationen die Eigenschaft, daß jede Änderung, die aus den ihr angehörigen durch Zusammensetzung hervorgeht, ihr selbst wieder angehört, so soll die Reihe eine Transformationsgruppe *genannt werden.*

In einer Fußnote wird hinzugefügt:

Begriffsbildungen wie Bezeichnung sind herübergenommen von der Substitutionstheorie, in der nur an Stelle der Transformationen eines kontinuierlichen Gebietes die Vertauschung einer endlichen Zahl diskreter Größen auftreten.

Einundzwanzig Jahre später, im Jahre 1883, wurde das Programm in den Mathematischen Annalen veröffentlicht. Dabei fügt Klein einige Fußnoten ein, wie etwa die folgende:

Bei den Gruppen des Textes wird nämlich stillschweigend vorausgesetzt, daß dieselben neben jeder Operation, die sie enthalten mögen, immer auch deren inverse enthalten; dies ist aber, wie wohl zuerst Lie hervorhob, bei unendlicher Zahl der Operationen keineswegs eine Folge des Gruppenbegriffes als solchen.

Lie reagierte heftig (Lie 1888–1893 III, p. xvii) *Ich sehe mich hier zu diesen Auseinandersetzungen veranlaßt, weil Klein's Schüler und Freunde wiederholt das gegenseitige Verhältnis zwischen Klein's und meinen Arbeiten falsch dargestellt haben und weil andererseits einige Bemerkungen, mit denen Klein die Neudrucke seines interessanten Programms in bis jetzt vier verschiedenen Zeitschriften (Annali di matematica, Annales de l'Ecole Normale, Mathematische Annalen, Bulletin of the New York Mathematical Society) begleitet hat, unrichtig aufgefaßt werden können. Ich bin kein Schüler von Klein, das Umgekehrte ist auch nicht der Fall, wenn es auch vielleicht der Wahrheit näher käme.*

Das Verständnis für die Präzision, die die Definition einer Gruppe erfordert, ist bei Klein selbst zu dieser fortgeschrittenen Zeit noch bemerkenswert unterentwickelt, sei es, daß es sich um den abstrakten Gruppenbegriff handelt, der von Weber in aller Schärfe herausgearbeitet worden war [Weber 1893], sei es, daß es um die genaue Festlegung des Begriffs der Transformationsgruppe geht, auf der das ganze Erlanger Programm fußte. Die Halbgruppe X^X aller Selbstabbildungen einer endlichen Menge X ist ja endlich, aber keine Gruppe, wenn X mindestens 2 Elemente hat. Die Bedingung, die den Schluß erlaubt, daß die Endlichkeit einer Halbgruppe schon die Gruppeneigenschaft erzwingt, ist *die Kürzbarkeit;* dies war von von Dyck, Frobenius, und Weber deutlich erkannt worden. Bei Klein scheint hiervon nicht die Rede zu sein. *Dieser* Kritik ist Klein freilich dann sofort enthoben, wenn man annimmt, daß das Wort *Transformation* einer Menge X als *bijektive* Selbstabbildung einer Menge definiert wird. Vermutlich müssen wir dies bei Klein (und bei unseren nachfolgenden Erörterungen ebenso bei Lie) unterstellen. Und ein Zweites fällt auf: Selbst im Jahre 1893, als Klein erkannt hat, daß mit seiner Definition einer Gruppe im Erlanger Programm die Übertragung des Begriffs von endlichen Permutationsgruppen auf Transformationshalbgruppen nicht in dem von ihm beabsichtigten Sinne gelungen war, beharrt er unverändert auf der Definition, die eine Halbgruppe und nicht eine Gruppe definiert. Selbst wenn wir Klein zugestehen, daß sich das Wort "Transformationen" nur auf bijektive Selbstabbildungen bezöge, wäre ja die Definition immer noch unzureichend für die Kennzeichnung einer Gruppe nach unserem Verständnis.

So scheint mir Felix Klein das Musterbeispield für diejenigen Mathematiker zu sein, die eine ausgezeichnete Intuition für den Gruppenbegriff hatten, bei denen aber nicht die Einsicht vollzogen wurde, daß das (für ihre Intuition) zu schwache Axiomensystem eine allgemeinere algebraische Struktur oder ein allgemeineres Transformationssystem definierte.

Gruppe-Halbgruppe bei Lie

Ganz anders Lie! Für Sophus Lie war eine Transformationsgruppe ein Begriff der Analysis: eine Halbgruppenwirkung $(s, x) \mapsto s \cdot x : S \times U \rightarrow U$ einer Menge von differenzierbaren Transformationen auf einer offenen Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$. Bei Lie freilich sind die Mengen S und U nicht genau definiert; gelegentlich geht er auf dieses Problem ein, ohne es in einer uns heute befriedigenden Weise zu bewältigen; so ist seine Theorie weitgehend lokal. Bezeichnenderweise führen die Begriffsbildungen des 20. Jahrhunderts, wie etwa die der sogenannten Pseudo-Liegruppen auf eigentlich halbgruppentheoretische Begriffsbildungen. Dies wurde von Wagner [1961] klar formuliert. Daß so der Begriff der inversen Halbgruppe, der in der gegenwärtigen algebraischen Theorie der Halbgruppen zentrale Bedeutung erlangt hat, aus den Bedürfnissen der Differentialgeometrie entstanden ist, hat Schein [1986] betont. Ihm verdanke ich viele Hinweise zu einer früheren Fassung dieses Artikels. Aber wir können hier nicht bei diesem Fragenkreis verweilen, sondern wenden uns einem früheren Aspekt der Geschichte des Halbgruppenbegriffs zu. Lies Schreibweise für die Wirkungsfunktion $(s, x) \to s \cdot x$ ist

$$x_j' = f_j(x_1, \ldots, x_n; s_1, \ldots, s_r), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Er hat sich fast dreißig Jahre mit immer neuen Anläufen bemüht, diesen Ansatz mit dem Begriff der endlichen Permutationsgruppen in Einklang zu bringen. An impliziten Voraussetzungen wurde mindestens die lokale Bijektivität angenommen. Wenn wir dies akzeptieren, dann kann man bis zum Vorliegen genauerer Untersuchungen sagen, daß Lie bei seinen iterierten Ansätzen (lokale) Halbgruppen von (lokalen) Diffeomorphismen ins Auge gefaßt hat. Lie hat sich um die Frage, ob die Existenz der identischen Transformation in seinen Halbgruppen aus den von ihm explizit oder implizit gemachten Annahmen gefolgert werden könne, bewußt bemüht; dies haben fast alle Autoren festgestellt, die sich mit Lies Arbeiten eingelassen haben. Insbesondere hat Wußing [Wußing 1969] darauf aufmerksam gemacht. (Loc. cit., S. 166 ff).

Das Verdienst von Lie besteht in der Erkenntnis, daß die Übertragung des Gruppenbegriffes von (der Ordnung nach) endlichen auf unendliche Gruppen den bemerkenswerten Unterschied nach sich zieht, daß für unendliche Gruppen die Existenz des Inversen eine der wesentlichen Eigenschaften der Gruppe ausmacht. Diese Einsicht ist bei Lie nicht plötzlich aufgetreten, sondern nach und nach aus dem Studium der Transformationsgruppen herausgewachsen.

Lie selbst äußert sich zu dieser Frage in dem grundlegenden Artikel von 1880 [Lie 1880] wie folgt:

In der Substitutionstheorie beweist man bekanntlich, daß die Substitutionen einer Gruppe sich paarweise als inverse Substitutionen zusammenordnen lassen. Da nun der Unterschied zwischen einer Substitutionsgruppe und einer Transformationsgruppe nur darin besteht, daß die erste eine endliche Zahl, die letzte eine unendliche Zahl von Operationen enthält, so liegt es nahe zu vermuten, daß auch die Transformationen einer Transformationsgruppe sich paarweise als inverse Transformationen zusammenordnen lassen. In früheren Arbeiten kam ich zu dem Schlusse, daß dies wirklich der Fall sei. Da indes bei meinen betreffenden Untersuchungen implizit gewisse Voraussetzungen gemacht wurden, so halte ich es für notwendig, meiner Definition des Begriffes Transformationsgruppe ausdrücklich die Forderung hinzuzufügen, daß die Transformationen der Gruppe sich paarweise als inverse Transformationen zusammenordnen lassen. Ich vermute allerdings, daß diese Forderung eine notwendige Konsequenz meiner ursprünglichen

Definition des Begriffes Transformationsgruppe ist. Es ist mir aber, wie gesagt, unmöglich gewesen, dies allgemein zu beweisen.

In seinen Notes historiques bemerkt Bourbaki [1972]:

Dans ses premières notes, Lie pensait pouvoir démontrer a priori l'existence de l'identité et de l'inverse dans tout ensemble de transformations stable par composition; il reconnaît plus tard que sa démonstration était incorrecte, et Engel lui fournait un contreexemple reproduit dans "Theorie der Transformationsgruppen, 3."

Das immer wieder erwähnte Gegenbeispiel Engels wird von Lie erstmalig in einer Fußnote zu [Lie 1884] wiedergegeben und ist höchst einfach: Für X nehmen wir die Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen; als Parametermenge S ebenfalls; in Liescher Schreibweise definieren wir die Wirkung durch

$$x' = f(x; s), \qquad f(x; s) = x + e^s.$$

Diese ist eine kontinuierliche Transformationsgruppe im Sinne von Lie, denn ist $x''f(x'; t)$, so gilt $x'' = f(f(x'; s); t) = (x + e^s) + e^t$ also $x'' = x + e^{s \circ t} = f(x, s \circ t)$ mit $s \circ t = \log(e^s + e^t)$. Diese "Transformationsgruppe" enthält weder die identische Transformation, geschweige denn mit einer der "Gruppe" angehörigen Transformation $x \mapsto x + e^s$ deren inverse Transformation $x \mapsto x - e^s$. Gleichzeitig lernen wir von diesem Beispiel die Nachteile der Lieschen Schreibweise. Das Beispiel ist, bis auf Äquivarianz, einfach die Halbgruppe $P =]0, \infty[$ der positiven reellen Zahlen mit der Addition, die auf $\mathbb{R}$ vermöge der Addition wirkt:

$$(p, x) \mapsto p + x : P \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}.$$

Dabei ist der zugehörige Isomorphismus ϕ: $(S, \circ) \mapsto (P, +)$ gegeben durch

$$\phi(s) = e^s; \qquad \phi(s \circ t) = e^{s \circ t} = e^s + e^t = \phi(s) + \phi(t).$$

Mit der "natürlichen" Parametrisierung ist die Halbgruppe S in offensichtlicher Weise in die Gruppe $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen eingebettet, die vermöge der Addition auf $\mathbb{R}$ wirkt. Das Engelsche "Gegenbeispiel" kommt aufgrund einer geschickt ungeschickt gewählten Parametrisierung der Transformationen zustande. Daß man wirkliche Gegenbeispiele erst in unseren Tagen angeben kann, ist eine bemerkenswerte Tatsache, auf die wir zuletzt eingehen werden.

In einem Aufsatz, den er zu Ehren von Evariste Galois zum Anlaß des 100jährigen Jubiläums der Ecole Normale im Jahre 1895, verfaßte, fomulierte Lie, vier Jahre vor seinem Tode [Lie 1895], seine vermutlich für ihn definitive Begriffsbestimmung einer Gruppe.

La définition la plus générale que l'on ait posée jusqu'ici est la suivante: Un ensemble d'opérations forme un groupe, si le produit de deux de ces opérations est équivalent à une seule opération appartenant á l'ensemble considéré. . . . Enfin, on n'a pas encore montré, d'une façon entièrement satisfaisante au point de vue purement théorique, s'il est nécessaire d'ajouter à la définition des groupes continus *que parmi leurs transformations se trouve la transformation identique. En étendant la notion de groupe à des opérations quelconques, on n'a pas le droit* *de conclure que de la définition donnée plus haut résulte le partage des opérations du groupe en couples d'opérations inverses.*

Hier also gibt Lie die erste formale Definition einer Transformationshalbgruppe unter dem Namen "Gruppe." Im Hinblick auf die vorausgegangenen abstrakten von von Dyck, Frobenius und insbesondere Weber gegebenen Definitionen einer Gruppe war Lie diesbezüglich entweder nicht auf der Höhe der Zeit, oder aber er war wirklich an einem Transformationshalbgruppenbegriff von größerer Allgemeinheit interessiert. Aufschlußreich ist in diesem Fall, was er in einer Bewertung eines neuen Beweises des sogenannten ersten Fundamentalsatzes durch seinen Schüler Friedrich Schur von der Technischen Hochschule Karlsruhe im dritten Band seines Werkes über die kontinuierlichen Gruppen zum Ausdruck bringt [Lie 1888–1893 III, 753 ff.]

Herr Schur hat für den ersten Fundamentalsatz einen analytisch eleganten Beweis geliefert. Aber sein Beweis erfordert größere Hilfsmittel als der unserige . . . Dazu kommt, daß bei uns der ganze erste Fundamentalsatz als spezieller Fall viel umfassenderer Sätze hervortritt. Wir wollen hier gleich noch erwähnen, daß Herr Schur sich von vorneherein auf solche r-gliedrige Gruppen . . . beschränkt, in denen die identische Transformation enthalten ist, und zwar setzt er (explizite) nur voraus, daß sich die Funktionen in der Umgebung der Parameter der identischen Funktion regulär verhalten.

Wir leugnen nicht, daß dieser Standpunkt, den Herr Schur eingenommen hat, ein gewisses Interesse darbietet, wir halten ihn jedoch nicht für den besten, denn wenn man einmal einen praktischen Standpunkt einnimmt und von vorneherein das Vorhandensein der identischen Transformation annimmt, tut man am Besten, gleich noch vorauszusetzen, daß die Transformationen der Gruppe paarweise zueinander invers sind. Will man dagegen einen philosophischen Standpunkt einnehmen, so erscheint es uns richtiger, sich gleich auf den allgemeinsten Standpunkt zu stellen und auch von der Forderung, daß die identische Transformation vorhanden sei, abzusehen, mit anderen Worten: so zu verfahren, wie wir es . . . im Vorhergehenden getan haben. Denn die Voraussetzung, daß die identische Funktion vorhanden sei, bringt verhältnismäßig wenig Vereinfachungen mit sich und die Schwierigkeiten sind durchaus nicht größer, wenn man auch auf diese Voraussetzung verzichtet.

Klar ist soviel: Lie kannte keine Anwendungen für eine wie auch immer geartete Transformations*halb*gruppentheorie, die er doch in seinen Fundamentalsätzen begründete. Dennoch hatte er ein scharfes Gespür für die Anwendung von Occam's razor auf seine Behandlung von Transformationshalbgruppen. Er drückt damit ein grundsätzliches Bedürfnis aus, bei seiner Fundierung der Theorie sorgfältig Buch zu führen über die Forderungen, die für den Beweis seiner Sätze nötig waren und keine darüberhinausgehenden Annahmen zu machen.

Gruppe=Halbgruppe bei zeitgenössischen Beobachtern

In der Bewertung von Lies Ringen um eine Formulierung des Transformationsgruppenbegriffs waren sich auch zeitgenössische Leser einig. So schreiben E.

Vessiot (er hatte einige Zeit in Leipzig bei Lie zugebracht!) und W. de Tannenberg in einer Besprechung von dessen Buch über Transformationsgruppen [Vessiot & Tannenberg 1889, 115 ff.]

L'auteur fait ensuite une digression sur les groupes de transformations Cremona; il montre que les transformations de ces groupes sont toujours deux à deux inverses l'une de l'autre, d'ou il résulte que ces groupes contiennent la transformation identique. Mais rien ne prouve qu'il en soit ainsi pour tous les groupes; et en effect, on trouve plus loin un exemple très simple d'un groupe ne contenant pas la transformation identique. Aussi M. Lie ne fait-il, dans ce qui suit, aucune hypothèse à ce sujet.

[Vessiot & Tannenberg 1889, 121 ff. über die infinitesimale Erzeugung einer offenen Umgebung eines Elementes in einer Transformationshalbgruppe]

À tout groupe à r paramètres correspondent r transformations infinitésimales indépendentes $X_1 f, \ldots, X_r f$, et toute transformation du groupe peut être obtenue en effectuant successivement: 1° *une transformation quelconque du groupe, toujours la même,* 2° *une transformation convenablement choisie d'un groupe à* un paramètre engendré par une transformation infinitésimale de la forme $\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \cdots + \lambda_r X_r f$.

Si le groupe à r paramètres $x_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)$ contient la transformation identique, l'ensemble de ses transformations se confond avec l'ensemble des transformations d'un faisceau de ∞^{r-1} groupes à un paramètre contenant la transformation identique. Les transformations infinitésimales de ce groupe sont deux à deux inverses l'une de l'autre.

Dieses Resultat bedarf noch einer eingehenderen Interpretation. Offenbar handelt es sich um "offene" Halbgruppen, und es wird ausgesagt, wie man alle Transformationen in einer offenen Umgebung eines festen Elementes ("toujours la même") erreicht, indem man von dort in allen möglichen Richtungen fortschreitet, die durch die infinitesimalen Transformationen einer "Liealgebra" gegeben sind, die aus den Gegebenheiten konstruiert wird. Ob es sich im allgemeinen in der Tat um eine volle Liealgebra handelt, geht aus dem Zitat nicht hervor. Der Zusatz wird aus heutiger Sicht nur verständlich, wenn wir unterstellen, daß hier wie immer angenommen wird, auch die Parameter $a = (a_1, \ldots, a_r)$, d. h. die Elemente der Halbgruppe, stammten aus einer Mannigfaltigkeit *ohne Rand.* Im damaligen Rahmen wird es sich allenfalls um offene Teilmengen eines $\mathbb{R}^r$ haben handeln können, und dies wäre für eine lokale Theorie auch ausreichend. Ist eine (lokale) topologische Halbgruppe auf einer topologischen r-dimensionalen Mannigfaltigkeit definiert und enthält sie eine Eins, so ist sie eine lokale Gruppe. (In dieser Allgemeinheit ist dies ein Satz von Mostert und Shields aus den 50er Jahren, welcher den Brouwerschen Fixpunktsatz voraussetzt [Mostert & Shields 1959].) Nur so kann man verstehen, daß dann die Menge der Einparameteruntergruppen, d. h. die Menge der eindimensionalen Vektorunterräume der r-dimensionalen Liealgebra ein $r - 1$-dimensionaler projektiver Raum ist, nämlich eben jene "Garbe von ∞^{r-1} vielen Einparametergruppen," von welcher in dem zitierten Abschnitt die Rede ist. Ganz sicher ist die Behauptung ". . . et toute transformation du groupe peut être obtenue . . ." in der im Zitat angedeuteten Allgemeinheit nicht richtig, es sei denn, die "Gruppe" bezöge sich auf eine Umgebung des ausgezeichneten Elementes. Die Verfasser weisen dann darauf hin (S. 123), daß Lie auch die Umkehrung beweist: Liegt eine r-dimensionale Liealgebra von infinitesimalen Transformationen vor, dann gehört hierzu auch eine (lokale) r-Parametergruppe mit den gegebenen als zugehörigen infinitesimalen Transformationen.

([Vessiot & Tannenberg 1889, 124]) *Quant aux groupes qui ne contiennent pas la transformation identique, ils ne présentent qu' un intérêt purement théorique. M. Lie démontre, en effet, qu' un tel groupe peut toujours s'obtenir en faisant dans un certain groupe à transformation identique un changement de paramètres convenable. Aussi M. Lie ne considère-t-il plus, dans la suite de l'ouvrage, que des groupes contenant la transformation identique.*

Diese Passage bestätigt, daß die systemtheoretischen Anwendungen fehlten, also eben jene "physikalischen" Anwendungen, für die die Halbgruppen erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts bedeutsam wurden, denn die Anwendungen damals waren völlig von der Geometrie und dem Symmetriebegriff dominiert. Gleichzeitig wird aber auch bestätigt, daß Lie nicht nur die richtigen Fragen stellte, sondern auch Sätze angab (und zu beweisen behauptete), die erst hundert Jahre später richtig verstanden wurden. Darauf soll schließlich noch eingegangen werden.

Lie'sche Halbgruppen in der Moderne

Alexander Doniphan Wallace darf mit Recht als Pionier der modernen Theorie der Halbgruppen angesehen werden [Hofmann, Koch, & Mostert 1974]. Die Tulane-Schule, die von Wallace an der Tulane University in den 50er Jahren ihren Ausgang nahm, dominierte für anderthalb Jahrzehnte die Forschung auf diesem Gebiet. Aber erst zögernd setzte sich die Einsicht durch, daß die topologischen Halbgruppen nach dem großartigen Siegeszug der topologischen Gruppen in der ersten Hälfte des Jahrhunderts einen neuen Zweig der topologischen Algebra und Funktionalanalysis bildeten. Wallace hat die Hemmnisse in einem Brief so beschrieben [Hofmann, Koch, & Mostert 1974, 23]:

It is a most difficult subject. (The best mathematics is the most mixed-up mathematics, those disciplines in which analysis, algebra and topology all play a vital role.) It is unintuitive in the sense that its theorems are not *generalizations of theorems about groups. The standard methods will not immediately work.*

Erst als die harmonische Analysis und die Darstellungstheorie sich des Themas der topologischen Halbgruppen bemächtigte und schließlich auch die Liesche Theorie ernsthaft Eingang fand, hatte sich dieser Zweig etabliert ([Hofmann 1976], Einleitung zu [Hilgert, Hofmann, and Lawson 1989], Vorwort zu [HLP], Einleitung zu [Hofmann 1990a]). Insbesondere die neue Lietheorie der Halbgruppen [Hilgert, Hofmann, and Lawson 1989; Hofmann, Lawson, and Pym 1990] hat erneut Verständnis geweckt für die ursprünglichen Anliegen von Sophus Lie und für die Schwierigkeiten, mit denen er kämpfte. Es gibt gegenwärtig ungelöste

Probleme in diesem Bereich, die zu beantworten noch erheblicher Anstrengung bedarf. Wenn die gegenwärtige Forschung noch mit Schwierigkeiten ringt, wo uns ein Reichtum von Methoden und ein Begriffsapparat zur Verfügung steht, von denen man zu Lies Lebzeiten auch in den kühnsten Träumen keine Ahnung haben konnte, um wieviel größer müssen Lie die Hindernisse erschienen sein, die sich der Durchführung seiner genialen Ideen in den Weg stellten!

Einer gerechten Einschätzung von Lies Leistung stand in der Vergangenheit entgegen, daß nicht einmal die Kenner der jeweils zeitgenössischen Liegruppentheorie die mathematischen Sachverhalte verstehen konnten, die Lie geleistet hat über den Rahmen dessen hinaus, was in den Lehrbüchern und die üblicherweise kargen historischen Notizen dazu Aufnahme fand. (Die Notes historiques bei Bourbaki sind eine rühmliche Ausnahme, die eher die Regel bestätigen.)

Wir wollen dies an einem Beispiel erörtern. Auch in Lies eigenen Augen kulminierte seine Theorie in den von ihm so genannten *Fundamentalsätzen*. Es fängt schon hiermit an, daß die Lieschen Fundamentalsätze dringend einer genauen historischen Sichtung bedürfen. Zwar machen die Texte späterer Lehrbücher glauben, daß man genau wisse, was der Erste, der Zweite und der Dritte Liesche Fundamentalsatz sei. Eine Durchsicht der Lieschen Originalquellen, selbst die seines dreibändigen Werkes über kontinuierliche Gruppen [Lie 1888–1893], belehrt den Betrachter aber schnell, daß er sich dabei einem komplizierten, über anderthalb Jahrzehnte verflochtenen Netzwerk von immer wieder nachgebesserten Aussagen, Definitionen, Beweisen und Kommentaren und einer sich entwickelnden Terminologie gegenübersieht. Diese Schwierigkeiten haben auch schon die Zeitgenossen irritiert (s. z. B. [Biermann 1988, 169, 170, 317], zitiert auch in [Hofmann 1984]). Über die volle Allgemeinheit der von Lie gemachten Aussagen läßt sich zum Teil nur spekulieren. Da wir heute die Schwierigkeiten der erforderlichen Beweise kennen, sind wir in der Lage zu beurteilen, daß einige der von Lie ausgesprochenen Behauptungen damals allenfalls den Rang von begründeten Vermutungen haben konnten. Wir betrachten das sogenannte Erste Fundamentaltheorem, welches auch schon in der Besprechung von Vessiot and de Tannenberg [Vessiot & Tannenberg 1889] angesprochen wurde. Unsere Rekonstruktion lautet [Hofmann & Lawson 1983].

SATZ (1880–1893). *Jede* r-*dimensionale* lokale *differenzierbare Transformationshalbgruppe kann in eine* lokale *differenzierbare Transformationsgruppe eingebettet werden, deren* Liealgebra *bestimmt wird durch den Tangentialraum eines jeden inneren Punktes der Parameterhalbgruppe.*

Ist diese Rekonstruktion zu rechtfertigen, dann wäre der Erste Liesche Fundamentalsatz zugleich der erste Einbettungssatz einer Halbgruppe in eine Gruppe, lange bevor die Algebraiker sich dieser Aufgabe annahmen.

Den Status der gegenwärtigen Forschung zu dem Lieschen Fundamentalsatz in der oben wiedergegebenen Fassung findet man im Kapitel VII der Monographie [Hilgert, Hofmann, & Lawson 1989] und in dem Artikel von Lawson [Lawson 1990] in der Sammlung [Hofmann, Lawson, & Pym 1990]. Einschlägige moderne

Beiträge stammen aus zwei von D. Brown betreuten Dissertationen von G. Graham und R. Houston. Insbesondere ist interessant, daß man für kürzbare topologische Halbgruppen auf einer Mannigfaltigkeit heute eine positive Antwort des 5. Hilbertschen Problems [Aczél 1989; Hilbert 1900] hat; dies findet man bei Lawson [1990] auseinandergesetzt, aber bei Aczél [1989] noch nicht vermerkt. Ein vollständiger Beweis ist kompliziert, da er sich (unter anderem) auf die Lösung dieses Problems für lokale Gruppen durch Jacoby stützt. Alle kürzbaren Halbgruppen auf Mannigfaltigkeiten lassen sich lokal in eine Liegruppe einbetten. Es gibt indessen, wie wir heute wissen, kürzbare analytische Halbgruppen auf Mannigfaltigkeiten, die sich nicht einmal algebraisch in eine Gruppe einbetten lassen. Das in fast allen Quellen zitierte berühmte Engelsche Gegenbeispiel beruhte, wie wir oben erörterten, auf dem Lieschen Beharren auf einer konkreten Parametrisierung; die "echten" Gegenbeispiele kennt man erst seit wenigen Jahren, und dies heißt hundert Jahre nach Sophus Lies Gewaltanstrengungen, die Existenz der Eins und der Inversen aus analytischen Annahmen zu beweisen. (S. z. B. [Hilgert, Hofmann, & Lawson 1989, 441, Example V.4.59]. Zu den neuesten Versionen des Dritten Fundamentalsatzes für Halbgruppen s. [Weiss 1991].) Die Beispiele zeigen zudem, daß der Erste Liesche Fundamentalsatz in der rekonstruierten Fassung ohne die Adjektive "lokal" aus recht vertrackten Gründen, die man auch heute noch nicht voll versteht, falsch ist.

LITERATUR

Abel, N. H. 1826. Untersuchung der Funktionen zweier unabhängigen veränderlichen Grössen x und y, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Funktion von x, y und z ist. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **1**, 11–15.

Aczél, J. 1989. The state of the second part of Hilbert's Fifth Problem. *Bulletin of the American Mathematical Society* **20**, 153–163.

Biermann, K. -R. 1988. *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810–1920,* 2nd ed. Berlin: Akademie-Verlag.

Bosek, H. 1986. Marius Sophus Lie und die nicht kommutative harmonische Analysis. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der Deutschen Demokratischen Republik* **4**, 35–52.

Bourbaki, N. 1972. *Groupes et algèbres de Lie,* Chap. 2 et 3. Paris: Hermann.

Brockett, R. 1973. Lie algebras and Lie groups in control theory. In *Geometric methods in systems theory,* D. Q. Mayne and R. W. Brockett, Eds., pp. 43–82. Dordrecht/Boston, MA: Reidel.

Clifford, A. H., & Preston G. 1961. *The algebraic theory of semigroups I.* Providence, RI: Amer. Math. Soc.

de Séguier, J. -A. 1904. *Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits.* Paris.

Dickson, L. E. 1904. Review of de Séguier's book "*Theory of abstract groups.*" *Bulletin of the American Mathematical Society* **11**, 159–164.

Dickson, L. E. 1905a. Definitions of a group and a field by independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society* **6**, 198–204.

Dickson, L. E. 1905b. On semigroups and the general isomorphism between infinite groups. *Transactions of the American Mathematical Society* **6**, 204–208.

Frobenius, F., & Schur, I. 1906. Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 206–217.

Goldstein, J. A. 1985. *Semigroups of Linear Operators and Applications*. Oxford: Oxford Univ. Press.

Günter, P. 1968/1981. Sophus Lie. In *100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig*, H. Beckert und H. Schumann, Herausgeber, pp. 111–133. Deutscher Verlag der Wissenschaften 1981. (Nachdruck aus *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Facultas Rerum Naturalium* **27** (1968), 5–26.)

Hawkins, T. 1989. Line Geometry, Differential Equations, and the Birth of Lie's Theory of Groups. In *The History of Modern Mathematics*, D. E. Rowe & J. McCleary, Eds., I, pp. 275–327. San Diego: Academic Press.

Hilbert, D. 1900. *Mathematical problems*, lecture delivered before the International Congress of Mathematicians in Paris in 1900. *Bulletin of the American Mathematical Society* **8** (1902), 437–479.

Hildebrant, J. A. 1986. *Kochfest 60*. Proceedings of the 1986 Louisiana State University Semigroup Conference, Lousiana State University.

Hilgert, J., Hofmann, K. H., & Lawson, J. D. 1989. *Lie groups, convex cones, and semigroups*. Oxford: Oxford Univ. Press.

Hille, E. 1948. *Functional analysis and semi-groups* American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 31. New York: Amer. Math. Soc.

Hofmann, K. H. 1976. Topological semigroups, history, theory, applications. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **78**, 9–59.

Hofmann, K. H. 1984. Semigroups in the 19th century? In *Theory of semigroups, conference on theory and applications of semigroups held at Greifswald* Nov. 12–16, 1984, pp. 44–55. Mathematische Gesellschaft der Deutschen Demokratischen Republik, 1985.

Hofmann, K. H. 1990a. Lie groups and semigroups. In [Hofmann, Lawson, & Pym 1990, 3–26].

Hofmann, K. H. 1990b. Buchbesprechung von I. M. Yaglom, *Felix Klein and Sophus Lie, Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century*. Birkhäuser, Boston etc., 1988, xii +237. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **92**, Buchbesprechungen 19–21.

Hofmann, K. H. 1990c. Einige Ideen Sophus Lies—hundert Jahre danach. In *Jahrbuch Überblicke Mathematik*, pp. 93–125. Braunschweig: Vieweg, 1991.

Hofmann, K. H. 1986. Symmetrie und Homogenität. In *Symmetry of discrete mathematical structures and their symmetry groups, a collection of essays*, K. H. Hofmann & R. Wille, Eds. Berlin: Heldermann Verlag, 1991, 151–168. (Vortrag zum Darmstädter Symmetrie-Kongreß 1986.)

Hofmann, K. H., Koch, R. J., & Mostert, P. S. 1974. Alexander Doniphan Wallace on his 68th birthday. *Semigroup Forum* **7**, 10–31.

Hofmann, K. H., & Lawson, J. D. 1983. On Sophus Lie's fundamental theorems, I. *Indagationes Mathematicae* **45**, 453–466.

Hofmann, K. H., Lawson, J. D., & Pym, J. s. (Eds.) 1990. *The analytical and topological theory of semigroups*. Berlin: De Gruyter.

Howie, J. M. 1976. *An introduction to semigroup theory*. London/New York: Academic Press.

Jordan, C. 1868. Mémoire sur les groupes des mouvements. *Annali di Matematica Pura e applicata, Serie 2* **2**, 167–215, 322–345.

Klein, F. 1872. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat der K. Friedrich-Alexander-Universität zu Erlangen. A. Deichert. (*Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, R. Fricke und A. Ostrowski, Herausgeber, Band 1, pp. 460–497. Berlin: Springer, 1921.

Knauer, U. 1980. Zur Entwicklung der algebraischen Theorie der Halbgruppen. *Simon Stevin* **54**, 165–177.

Lallement, G. 1979. *Semigroups and combinatorial applications.* New York: Wiley.

Lawson, J. D. 1990. Embedding semigroups into Lie groups. In [Hofmann, Lawson, & Pym 1990, 51–80].

Lie, Marius Sophus. 1880. Theorie der Transformationsgruppen I. *Mathematische Annalen* **16,** 686–693.

Lie, Marius Sophus. 1884. *Mathematiske Middelser III, af Sophus Lie.* Christiania Forhandlinger Aar 1884, Nr. 15, 4 pp. (*Gesammelte Abhandlungen,* F. Engel, Hrsg., Band **5**, pp. 499–502. Leipzig: Teubner, 1924.)

Lie, Marius Sophus. 1888–1893. *Theorie der Transformationsgruppen I, II, und III.* Leipzig: Teubner. New York: Chelsea, 1970.

Lie, Marius Sophus. 1895. Influence de Galois sur le développement des mathématiques. In *Le Centenaire de l'École Normale 1795–1895,* pp. 481–489. Paris: Librairie Hachette et C[ie]. (*Gesammelte Abhandlungen* F. Engel, Hrsg., Band **6**, pp. 592–601.) Leipzig: Teubner, 1927.

Lie, Marius Sophus. 1934. *Gesammelte Abhandlungen.* F. Engel und P. Heegard, Herausgeber. Leipzig: Teubner und Oslo: Aschehoug.

Mostert, P. S., & Shields, A. L. 1959. Semigroups on a manifold. *Transactions of the American Mathematical Society* **91,** 380–389.

Olver, P. J. 1986. *Applications of Lie groups to differential equations.* New York: Springer.

Petrich, M. 1970. Bibliographical comment. *Semigroup Forum* **1,** 184.

Polyshchuk, E. M. 1983. *Sophus Lie.* Moscow: Akademia Nauk SSSR.

Preston, G. B. 1974. A. H. Clifford: An appreciation of his work on the occasion of his sixty-fifth birthday. *Semigroup Forum* **7,** 32–57.

Rowe, D. E., 1989. The early geometrical works of Sophus Lie and Felix Klein. In *The History of Modern Mathematics,* D. E. Rowe & J. McCleary, Eds., I, 209–273. San Diego: Academic Press.

Schein, B. M. 1970. Relation algebras and function semigroups. *Semigroup Forum* **1,** 1–62.

Schein, B. M. 1986. Prehistory of the theory of inverse semigroups. In [Hildebrant 1986, 72–76].

Schmid, W. 1982, Poincaré and Lie groups. *Bulletin of the American Mathematical Society* **6,** 175–186.

Scholz, E. 1989. *Symmetrie, Gruppe, Dualität,* Boston: Birkhäuser.

von Dyck, W. 1882/1883. Gruppentheoretische Studien I und II. *Mathematische Annalen* **20** (1882), 1–44 und **22** (1883), 70–108.

Vessiot, E., & de Tannenberg, W. 1889. Comptes rendus et analyses: Lie (Sophus), Professor der Geometrie an der Universität Leipzig, *Theorie der Transformationsgruppen I.* Abschnitt. Unter der Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet (x und 632 Seiten). Gr. in 8°. *Bulletin des Sciences Mathématiques (2)* **13,** 113–148.

Wagner, V. V. 1961. Foundations of differential geometry and modern algebra. In *Proceedings of the 4th All-Union Mathematical Congress, Leningrad 1961,* Vol. I (1963), pp. 17–29. [In Russian]

Wagner, V. V. 1966/1968. Towards an algebraic theory of coordinate atlases. In *Transactions of the Seminar on Vector and Tensor Analysis, Moscow University* **13** (1966), 510–563, and **14** (1968), 229–281. [In Russian]

Wagner, V. V. 1979. The algebra of binary relations and its applications to differential geometry. *Differential Geometry, Saratov University* **4,** 15–131. [In Russian]

Weber, H. 1893. Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. *Mathematische Annalen* **43,** 521–549.

Weiss, W. 1989. Local Lie semigroups and open embeddings into global topological semigroups. *Indagationes Mathematicae* N. S., **2**(1), 115–138.

Williamson, J. H. 1967. Harmonic analysis on semigroups, *Journal of the London Mathematical Society* **41,** 1–41.

Wußing, H. 1969. *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Wußing, H. & Arnold, W. (Herausgeber). 1975. *Biographien bedeutender Mathematiker*. Berlin: Volk und Wissen.

Yaglom, I. M. 1988. *Felix Klein and Sophus Lie, Evolution of the idea of symmetry in the nineteenth century*. Boston: Birkhäuser.